Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

12. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

30. март 2018.

Први дан

1. Кружница уписана у $\triangle ABC$ има центар у тачки I и додирује страницу BC у тачки D. На дужима BI и CI одабране су тачке P и Q, редом, такве да важи $\measuredangle BAC = 2\measuredangle PAQ$. Доказати: $\measuredangle PDQ = 90^\circ$.

2. Дат је природан број n, $n > 1$. Цео број x зовемо *красним* ако је остатак броја x^2 при дељењу са n непаран. Доказати да не постоји више од $1+\lfloor\sqrt{3n}\rfloor$ узастопних красних природних бројева.

3. У равни је дато n правих међу којима никоје две нису паралелне и никоје три се не секу у једној тачки. Под *пресечним тачкама* сматрамо све тачке у којима се секу неке две од ових правих.

a) Доказати да постоји права са чије се сваке стране налази бар по

$$\left\lfloor \frac{(n-1)(n-2)}{10} \right\rfloor$$

пресечних тачака (тачке на тој правој се не рачунају).

b) За које вредности n се може достићи једнакост?

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

12. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

31. март 2018.

Други дан

4. Доказати да постоји тачно један полином $P(x)$ с реалним коефицијентима за који је полином

$$(x+y)^{1000} - P(x) - P(y)$$

дељив полиномом $xy - x - y$.

5. Нека су a и b непарни природни бројеви већи од 1. Посматрајмо таблу $a \times b$ којој недостају поља $(2,1)$, $(a-2,b)$ и (a,b) (под пољем (i,j) подразумевамо поље у пресеку врсте i и колоне j). Претпоставимо да је оваква табла поплочана помоћу 2×1 домина и 2×2 квадрата (домине се могу ротирати). Доказати да је употребљено бар $\frac{3}{2}(a+b) - 6$ домина.

6. За задат природан број k, нека је n_k најмањи природан број такав да постоји коначан скуп A целих бројева са следећим особинама:

- за свако $a \in A$ постоје $x, y \in A$ (не обавезно различити) такви да

$$n_k \mid a - x - y;$$

- не постоји подскуп B скупа A за који важи $|B| \leqslant k$ и

$$n_k \mid \sum_{b \in B} b.$$

Доказати да за све k, $k \geqslant 3$, важи

$$n_k < \left(\frac{13}{8}\right)^{k+2}.$$

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.